$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \lambda \cdot f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ f\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \end{array}\right\}$ pas linéaire

EXERCICE 4 : Soit f un endomorphisme de ℝ

Supposons que $f(\vec{u}) = 4\vec{u}$ et f

1) Déterminer la matrice représentant f en prena

2) Déterminer la matrice représentant f en prena

f

Théorème 1 E, F es

$f : E \to F$

f linéaire $\Rightarrow f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

$\vec{0}_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{0}_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Contraposition

$A \Rightarrow B \equiv$

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Exemple :

S'il pleut, je reste à la maison ≡

Si je ne reste pas à la maison, il ne pleut pas.

Si je n'ai pas faim, je ne mange rien ≡

Si je mange, j'ai faim.

Contraposition de Théorème 1

$f : E \to F$

$f(\vec{0}_E) \neq \vec{0}_F \Rightarrow f$ n'est pas linéaire

b) L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : f (x , y , z) = (2x + 3z , y – 5z) est-elle linéaire ?

c) L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : f (x , y) = (2x , 3x + y , y – 5) est-elle linéaire ?

$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 \\ 3\cdot 0 + 0 \\ 0 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f$ n'est pas linéaire

$\Rightarrow f$ n'est pas linéaire

$\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$

EXERCICE 1 : Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Soient $\vec{u} = (1, -1)$ et $\vec{v} = (3, 2)$.
Supposons que $f(\vec{u}) = 4\vec{u}$ et $f(\vec{v}) = -3\vec{v}$.

1) Déterminer la matrice représentant f en prenant $(\vec{u}, \vec{v})$ comme base (à démontrer) de départ et d'arrivée.

2) Déterminer la matrice représentant f en prenant la base canonique de $\mathbb{R}^2$ comme base de départ et d'arrivée.

a)

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{cc} f(\vec{u}) & f(\vec{v}) \end{array}$$
$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \vec{u} \\ \vec{v} \end{array}$$

base d'arrivé — base de départ

$f(\vec{u}) = 4\cdot\vec{u} = 4\cdot\vec{u} + 0\cdot\vec{v}$

$f(\vec{v}) = -3\cdot\vec{v} = 0\cdot\vec{u} + -3\cdot\vec{v}$

b) $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

base canonique

$\vec{e_4} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{e_5} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{array}{cc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \end{array}$$
$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{21}{5} \\ -\frac{14}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}\begin{array}{c} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \end{array} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$\dim \mathbb{R}^2 = 2$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$ $\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$

$\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

base canonique de $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

base de $\mathbb{R}^4$

I) $a + 3b = 1$

II) $-a + 2b = 0$

I+II) $5b = 1$

$b = \frac{1}{5}$

$a = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = a\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ...

I) $1 = 2a + 2$ ...

II) $2 = 3a +$ ...

III) $3 = a + 7$ ...

$$f(\vec{e_1}) = f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = f\Big(\underbrace{a}_{=\frac{2}{5}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}_{=\vec{u}} + \underbrace{b}_{=\frac{1}{5}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}}_{=\vec{v}}\Big)$$

$$= f\left(\frac{2}{5}\cdot\vec{u} + \frac{1}{5}\cdot\vec{v}\right) =$$

$f(a\vec{u} + b\vec{v}) = a\,f(\vec{u}) + b\,f(\vec{v})$

$$= \frac{2}{5}\cdot f(\vec{u}) + \frac{1}{5}\cdot f(\vec{v}) =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot 4\cdot\vec{u} + \frac{1}{5}\cdot(-3)\cdot\vec{v} =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot 4\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \frac{3}{5}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{8}{5} - \frac{9}{5} \\ -\frac{8}{5} - \frac{6}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{5} \\ -\frac{14}{5}\end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5}\cdot\underbrace{\vec{e_1}}_{=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} + -\frac{14}{5}\cdot\underbrace{\vec{e_2}}_{=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$$

I) $1 = 2a + 2b$

II) $2 = 3a + 4b$

III) $3 = a + 7b$

I) $a + 3b = 0$

II) $-a + 2b = 1$

I+II) $5b = 1$

$\Rightarrow b = \frac{1}{5}$, $a = -\frac{3}{5}$

$$f(\vec{e_2}) = f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = f\Big(\underbrace{a}_{=-\frac{3}{5}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}_{=\vec{u}} + \underbrace{b}_{=\frac{1}{5}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}}_{=\vec{v}}\Big)$$

$f(a\vec{u} + b\vec{v}) = a f(\vec{u}) + b f(\vec{v})$

f linéaire

$$= -\frac{3}{5} \cdot f(\vec{u}) + \frac{1}{5} f(\vec{v}) =$$

$$= -\frac{3}{5} \cdot 4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}_{=\vec{u}} + \frac{1}{5} \cdot (-3) \underbrace{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}}_{=\vec{v}}$$

$$= \begin{pmatrix}-\frac{12}{5} - \frac{9}{5}\\ \frac{12}{5} - \frac{6}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{21}{5}\\ \frac{6}{5}\end{pmatrix}$$

$$= \underline{-\frac{21}{5}} \cdot \underbrace{\vec{e_1}}_{=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} + \underline{\frac{6}{5}} \cdot \underbrace{\vec{e_2}}_{=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}$$

$=$

$=$

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\ -\frac{14}{5}\end{pmatrix} =$$

miro